ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 2.

I.

Кратныя точки и касательныя алгебраическихъ кривыхъ.

(Статья 2-ая).

Кратныя Касательныя.

§ 11. Давъ понятіе о разныхъ родахъ кратныхъ точекъ, мы приступаемъ теперь къ кратнымъ касательнымъ, или, другими словами, къ прямымъ линіямъ, которыя касаются кривой въ двухъ и болѣе точкахъ. Особенными точками называютъ кратныя точки и такія, въ которыхъ кратныя касательныя касаются кривой.

Мы начали изслѣдованіе кратныхъ точекъ, взявъ одну изъ нихъ за начало координатныхъ осей, здѣсь начнемъ изслѣдованіе, взявъ одну изъ осей (напр. $y=o$) за крайнюю касательную.

Положивъ въ общемъ уравненіи $y=o$, мы получимъ уравненіе

$$A+Bx+Dx^2+Gx^3+\ldots\ldots+Px^n=o,$$

которое опредѣлитъ точки, въ коихъ ось x пересѣкаетъ кривую.

Этому уравненію можно дать форму:

$$P\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\;\ldots\ldots=o\;.\;.\;(a)$$

гдѣ a, b, c, ... суть величины x, соотвѣтствующія точкамъ сѣченія оси съ кривой.

Ось будетъ касательная, если двѣ изъ этихъ точекъ совпадутъ, т. е. если уравненіе будетъ имѣть форму:

$$P\,(x-a)^2\,(x-b)\;\ldots\ldots=o.$$

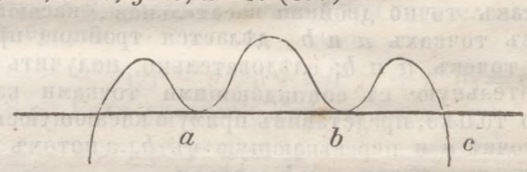
Слѣдовательно ось касается кривой въ точкѣ $y=o$, $x=a$. Если $A=o$, $B=o$, то ось касается кривой въ началѣ.

1-е Уравненіе (a) можетъ имѣть двѣ различныя пары равныхъ корней, оно имѣетъ въ этомъ случаѣ форму:

$$P\,(x-a)^2\,(x-b)^2\,(x-c)\;\ldots\ldots=o,$$

ось есть двойная касательная въ дѣйствительныхъ точкахъ $y=o$, $x=o$; $y=o$, $x=b$. (ф. 7)

Ф. 7.



Очевидно, что это не можетъ случиться въ кривой ниже четвертой степени.

2-е. Ось можно разсматривать какъ двойную касательную, если двѣ точки касанія будутъ мнимыя, т. е. если уравненіе будетъ имѣть форму:

$$P\,(x^2+px+q)^2\,(x-c)\;\ldots\ldots=o,$$

гдѣ множитель x^2+px+q не разлагается на два дѣйствительные множителя.

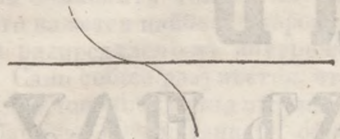
3-е. Уравненіе можетъ имѣть форму:

$$P\,(x-a)^3\,(x-c)\;\ldots\ldots=o,$$

тогда ось будетъ пересѣкать кривую въ трехъ совпадающихъ точкахъ. Вообще, взявъ три послѣдовательныя точки на кривой, линія соединяющая первую и вторую будетъ одна касательная, а соединяющая вторую и третью—послѣдовательная касательная; слѣдовательно въ настоящемъ случаѣ двѣ касательныя совпадаютъ. Эта касательная называется *касательною возврата*; ибо если мы будемъ разсматривать кривую, какъ обвертку движущейся линіи, то въ этомъ случаѣ, два послѣдовательныя положенія движущейся прямой линіи совпадаютъ. Точка прикосновенія касательной возврата называется точкою *перегиба*.

Если $A=o$, $B=o$, $D=o$, то начало есть точка *перегиба*, а $y=o$ есть касательная въ этой точкѣ, и въ самомъ дѣлѣ уравненіе будетъ имѣть форму:

$$Px^3(x-c)\;.\;.\;.\;.=o$$

Ф. 8. 

§ 12. Легко замѣтить тѣсную соотвѣтственность между родами двойныхъ точекъ и двойныхъ касательныхъ, а именно: каждая двойная точка имѣетъ двѣ касательныя, двойная касательная имѣетъ двѣ точки касанія; двѣ касательныя въ первомъ случаѣ и двѣ точки во второмъ могутъ быть дѣйствительныя, совпадающія, или мнимыя. Въ точкѣ *перегиба* касательная есть двойная, въ ней точки касанія совпадаютъ; казалось бы что она пересѣкаетъ кривую въ четырехъ послѣдовательныхъ точкахъ, ибо, положивъ въ Ф. 7, что точки a и b совпадаютъ, найдемъ, что касательная пересѣкаетъ кривую въ четырехъ послѣдовательныхъ точкахъ. Но легко видѣть, что въ этомъ послѣднемъ случаѣ, касательная будетъ не двойная, а тройная; въ самомъ дѣлѣ, касательная соединяющая первую и вторую точки совпадаетъ съ касательною соединяющею третью и четвертую. Какъ хорда пересѣкающая кривую въ точкахъ a и b дѣлается касательною при совпаденіи точекъ a и b, такъ точно двойная касательная, касающаяся кривой въ точкахъ a и b, дѣлается тройною при совпаденіи точекъ a и b; слѣдовательно, получить двойную касательную съ совпадающими точками касанія возможно только, представивъ прямую касающуюся кривой въ точкѣ a и пересѣкающую въ b, а потомъ предположивъ, что точки a и b совпали.

§ 13. Покажемъ теперь, что въ обыкновенномъ случаѣ кривая лежитъ по одну сторону касательной, въ точкѣ же *перегиба* кривая пересѣкаетъ касательную и переходитъ съ одной стороны на другую.

Это есть частный случай слѣдующей общей теоремы: *Двѣ кривыя, имѣющія четное число общихъ последовательныхъ точекъ, касаются не пересѣкаясь, а имѣющія нечетное число—пересѣкаются*

Пусть уравненія двухъ кривыхъ будутъ $y=F(x)$, $y=f(x)$, пусть эти кривыя пересѣкаются въ точкѣ $x=a$; то по теоремѣ Тайлора ординаты соотвѣтствующія точкѣ $x=a+h$ будутъ

$$y_1=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{1.2}F''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}F'''(a)+\ldots\ldots$$

$$y_2=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots\ldots\ldots$$

Теперь $f(a)=F(a)$, ибо кривыя пересѣкаются въ точкѣ $x=a$, слѣдовательно

$$y_1-y_2=h\{F'(a)-f'(a)\}+\frac{h^2}{1.2}\{F''(a)-f''(a)\}+\frac{h^3}{1.2.3}\{F'''(a)-f'''(a)\}+.$$

Когда h будетъ величина безконечно малая, то извѣстно, что весь рядъ будетъ имѣть знакъ своего перваго члена, знакъ, который измѣняется съ измѣненіемъ знака у h; слѣдовательно, если въ безконечно близкой точкѣ $(x=a-h)$ ордината кривой $F(a)$ больше ординаты кривой $f(a)$, то въ точкѣ $(x=a+h)$ она будетъ меньше. Отсюда видимъ, что если двѣ кривыя имѣютъ одну общую точку, то вообще та, которая возвышается съ одной стороны точки, понижается съ другой.

Положимъ теперь, что $F'(a)=f'(a)$, первый членъ ряда будетъ

$$\{F''(a)-f''(a)\}\frac{h^2}{1.2},$$

онъ не перемѣняетъ знака съ h; слѣдовательно кривая, которая возвышается съ одной стороны точки $x=a$, будетъ возвышаться и съ другой. Но въ этомъ случаѣ очевидно кривыя лежатъ тѣснѣе одна возлѣ другой въ сосѣдствѣ точки $x=a$; ибо разность ординатъ не заключаетъ первой степени h: что геометрически выражаютъ, говоря, что кривыя имѣютъ двѣ послѣдовательныя общія точки. Тоже можно показать слѣдующимъ образомъ: пусть x_1, y_1; x_2 y_2 будутъ координаты двухъ какихъ нибудь точекъ на кривой, отнесенной къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ, очевидно что $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ будетъ тангенсъ угла, который сѣкущая составляетъ съ осью x, но если точки совпадутъ, то мы знаемъ что $\frac{dy}{dx}$, въ данной точкѣ, будетъ тангенсъ угла, который касательная составляетъ съ осью абсцисъ; слѣдовательно, если двѣ кривыя имѣютъ общую точку и общую величину для $\frac{dy}{dx}$ въ этой точкѣ, то онѣ имѣютъ и послѣдовательную общую точку.

§ 14. Если кривыя имѣютъ три послѣдовательныя общія точки, то мы будемъ имѣть

$$F''(a)=f''(a),$$

первый членъ ряда будетъ

$$\left(F'''(a)-f'''(a)\right)\frac{h^3}{1.2.3},$$

который измѣнитъ знакъ съ измѣненіемъ знака у h; слѣдовательно кривыя перекрещиваются въ данной точкѣ. И вообще, если разложеніе y_1-y_2 начинается четною степенью h; то оно не измѣняетъ знака съ h, слѣдовательно кривыя касаются не перекрещиваясь; но если оно начинается нечетной степенью h, то оно измѣняетъ знакъ съ измѣненіемъ у h, слѣдовательно кривыя перекрещиваются въ данной точкѣ.

Извѣстно, что соприкасательный кругъ въ какой нибудь точкѣ коническаго сѣченія, имѣя три общія послѣдовательныя точки съ нимъ, касается, перекрещивая его; но въ вершинахъ осей онъ имѣетъ съ коническимъ сѣченіемъ четыре общія послѣдовательныя точки и, касаясь, его не перекрещиваетъ.

Положимъ, что одною изъ кривыхъ будетъ прямая линія. Касательная въ точкѣ перегиба перекрещиваетъ кривую; но линія, имѣющая четное число общихъ послѣдовательныхъ точекъ съ кривою, вся лежитъ въ сосѣдствѣ, по одну сторону кривой.

§ 15. Ось $y=o$ будетъ тройная касательная, если уравненіе опредѣляющее точки ея пересѣченія съ кривой будетъ формы:

$$P(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2(x-d)\;.\;.\;.=o.$$

Очевидно, что такая касательная не можетъ существовать въ кривыхъ ниже шестой степени. Мы можемъ, какъ въ § 7, различать четыре рода тройныхъ касательныхъ, смотря по тому будутъ ли точки соприкосновенія дѣйствительны и всѣ различны, двѣ мнимыя и одна дѣйствительная, одна дѣйствительная и двѣ совпадающія, или всѣ три совпадающія. Послѣдній случай будетъ имѣть мѣсто, когда уравненіе будетъ формы:

$$P\,(x-a)^4\,(x-b)\;.\;.\;.\;.=o,$$

ось пересѣкаетъ кривую въ четырехъ совпадающихъ точкахъ, а слѣдовательно будетъ тройная касательная. Точка касанія такой касательной называется *волнообразною точкою.* Точно также существуютъ кратныя касательныя высшихъ порядковъ, или существуютъ волнообразныя точки высшихъ порядковъ, происходящія отъ пересѣченія кривой прямою линіею больше чѣмъ въ четырехъ совпадающихъ точкахъ. Если касательная имѣетъ съ кривою нечетное число совпадающихъ точекъ, то эту точку *Крамеръ* называетъ точкою *видимаго перегиба*, а если четное, то онъ называетъ ее *змеинообразною точкою* или *волнообразною*, которая очевидно ничемъ не отличается отъ обыкновенной точки на кривой.

§ 16. До сихъ поръ мы поясняли тѣ случаи, въ которыхъ началомъ была кратная точка, или одна изъ координатныхъ осей была кратною касательною; теперь покажемъ, что форма уравненія иногда проявляетъ существованіе кратныхъ точекъ и кратныхъ касательныхъ, лежащихъ гдѣ нибудь.

1-е. Если уравненіе кривой будетъ формы:

$$\alpha\varphi+\beta\psi=o,$$

гдѣ α, β суть уравненія двухъ прямыхъ линій, а φ, ψ суть какія нибудь функціи координатъ, очевидно точка $\alpha\beta$ будетъ на кривой. Уравненіе касательной въ этой точкѣ будетъ

$$\alpha\,\varphi_1+\beta\,\psi_1=o,$$

гдѣ $\varphi_1\;\psi_1$ суть тѣ формы функцій φ, ψ, которыя онѣ принимаютъ, введя условія $\alpha=o$, $\beta=o$.

Въ самомъ дѣлѣ, если будемъ искать $n-1$ точекъ, въ которыхъ какая нибудь линія $\alpha-k\beta=o$, проходящая черезъ точку $\alpha\beta$, пересѣкаетъ кривую, то получимъ уравненіе:

$$\beta\Big\{k\,(\varphi_1+M\beta+N\beta^2+\ldots)+(\psi_1+M'\beta+N'\beta^2+\ldots)\Big\}=o,$$

чтобы и второй корень этого уравненія β былъ $=o$, мы должны имѣть $k\varphi_1+\psi_1=o$, слѣдовательно, подставлая вмѣсто k, $\frac{\alpha}{\beta}$, мы получимъ вышенаписанное уравненіе касательной.

2-е. Очевидно что кривая

$$\alpha\beta\gamma\delta\;.\;.\;.\;.=\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\;.\;.\;.$$

проходитъ черезъ точки

$$\alpha\alpha_1,\;\alpha\beta_1,\;\alpha\gamma_1,\;\beta\gamma_1,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\gamma\gamma_1,\;.\;.\;.\;.$$

3-е. Если уравненіе будетъ формы:

$$\alpha\varphi+\beta^2\psi=o,$$

то α будетъ касательною въ точкѣ $\alpha\beta$, ибо очевидно что эта линія пересѣкаетъ кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ; или если кривая будетъ:

$$\alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3\;.\;.\;.\;.\;.\;\alpha_n+\beta^2\varphi=o,$$

то $\alpha_1\;\alpha_2,\;.\;.\;.$ будутъ n касательныхъ въ точкахъ, въ которыхъ линія β пересѣкаетъ кривую.

Форма этого уравненія показываетъ, что если n точекъ касанія лежатъ на прямой β, то остальныя точки, въ которыхъ эта касательная пересѣкаетъ кривую, лежатъ на кривой $(n-2)$-й степени.

4-е. Если уравненіе будетъ формы:

$$\alpha^2\varphi+\alpha\beta\psi+\beta^2\chi=o.$$

Если будемъ искать точки пересѣченія какой нибудь прямой $\alpha-k\beta=o$, проходящей черезъ точку $\alpha\beta$, съ кривою, то мы найдемъ, что двѣ изъ нихъ всегда совпадаютъ съ точкою $\alpha\beta$, слѣдовательно это будетъ двойная точка. Можно показать, какъ и въ 1-мъ, что касательныя въ этой точкѣ будутъ:

$$\alpha^2\varphi_1+\alpha\beta\psi_1+\beta^2\chi_1=o,$$

гдѣ $\varphi_1\;\psi_1\;\chi_1$ суть величины функцій φ, ψ, χ, соотвѣтствующія координатамъ точки $\alpha=o$, $\beta=o$.

5-е. Если уравненіе будетъ формы:

$$\alpha^3\varphi+\alpha^2\beta\psi+\alpha\beta^2\chi+\beta^3\pi=o,$$

то точка $\alpha\beta$ будетъ тройная, а три касательныя въ этой точкѣ будутъ

$$\alpha^3\varphi_1+\alpha^2\beta\psi_1+\alpha\beta^2\chi_1+\beta^3\pi_1=o.$$

6-е. Если уравненіе будетъ формы:

$$\alpha\varphi+\beta^2\gamma^2\psi=o,$$

то α будетъ двойная касательная въ точкахъ $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$.

7-е Если уравненіе будетъ формы:

$$\alpha\varphi+\beta^3\psi=o,$$

то $\alpha\beta$ будетъ точка перегиба, и α касательною въ ней.

§ 17 (*). Теперь покажемъ, какъ по уравненію мы можемъ узнать родъ точекъ, которыя находятся на кривой въ безконечномъ разстояніи. Уравненіе въ трилинейныхъ координатахъ есть

$$u_n+u_{n-1}z+u_{n-2}z^2+\;.\;.\;.\;.=o$$

Направленіе n точекъ, находящихся въ безконечномъ разстояніи, найдется (дѣлая $z=o$ въ уравненіи) изъ уравненія $u_n=o$, которое, рѣшивъ въ отношеніи къ $\frac{y}{x}$, будетъ

$$(y-m_1x)\,(y-m_2x)\,(y-m_3x)\;.\;.\;.\,(y-m_nx)=o.$$

Кривая n-ой степени имѣетъ вообще n асимптотъ, а именно касательныхъ въ n точкахъ, въ которыхъ безконечно отдаленная линія z пересѣкаетъ кривую. Мы можемъ найти ихъ уравненія слѣдующимъ образомъ; изъ 3-го видимъ, что если уравненіе будетъ формы:

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\;.\;.\;.\;\alpha_n+z^2\varphi=o,$$

(*) Чтобы легко понять этотъ § надобно обратиться къ моему переводу съ Англійскаго „ *Коническія сѣченія, Сольмана.* §§. 52, 64, 270, 271.

то $a_1, a_2 \ldots\ldots$ будутъ n асимптотъ. Но данному уравненію

$$(y-m_1x)(y-m_2x)\ldots\ldots+z\,u_{n-1}+z^2u_{n-2}\ldots=o$$

можно дать форму

$$(y-m_1x+\lambda_1)(y-m_2x+\lambda_2)\ldots=z^2\phi,$$

ибо члены n-ой степени въ x и y очевидно одинаковы въ обѣихъ, а n произвольныхъ $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ во второмъ можно такъ опредѣлить, чтобы n членовъ $(n-1)$-ой степени были одинаковы въ обѣихъ уравненіяхъ.

Возмемъ въ примѣръ уравненіе:

$$(x+y)(2x+y)(3x+y)+17x^2+11xy+2y^2+12x+10y+36=o,$$

которому требуется дать форму

$$(x+y+\lambda_1)(2x+y+\lambda_2)(3x+y+\lambda_3)+Ax+By+C=o.$$

Для опредѣленія $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, будемъ имѣть три уравненія

$$6\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3=17,$$
$$5\lambda_1+4\lambda_2+3\lambda_3=11,$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2;$$

и уравненіе получитъ форму

$$(x+y+4)(2x+y-3)(3x+y+1)+43x+21y+48=o.$$

§ 18. Если два корня уравненія $u_n=o$ будутъ равны, напр. $m_1=m_2$, то общее уравненіе имѣетъ форму $(y-m_1x)^2\phi+z\psi=o$; двѣ точки, въ которыхъ z пересѣкаетъ кривую совпадаютъ, слѣдовательно безконечно отдаленная линія z есть касательная къ кривой.

Если три корня будутъ равны, то безконечно отдаленная линія z пересѣкаетъ кривую въ трехъ совпадающилъ точкахъ, *т. е* касается ея въ точкѣ перегиба.

Если въ общемъ уравненіи коефиціентъ при y^n будетъ$=o$, то ось y-въ проходитъ черезъ точку лежащую на безконечности, и намъ остается уравненіе для опредѣленія остальныхъ точекъ пересѣченія, только $(n-1)$-*ой* степени.

Если коефиціентъ при y^{n-1} также уничтожится, то ось y будетъ асимптота.

Если два множителя въ членѣ u_n будутъ равны и одинъ изъ нихъ будетъ множителемъ въ u_{n-1}, то кривая имѣетъ двойную точку на безконечности, ибо очевидно, уравненіе будетъ имѣть форму

$$(y-m_1x)^2\phi+z(y-m_1x)\psi+z^2\pi=o.$$

§ 13. Ниже покажемъ какъ вообще разыскиваются особенныя точки на кривой, а теперь дадимъ нѣсколько примѣровъ для поясненія.

Пр. 1. $\quad x^4-ax^2y+by^3=o.$

Пр. 2. $\quad x^4-2a^2xy+2x^2y^2+ay^3+y^4=o.$

Въ обоихъ случаяхъ начало есть тройная точка. Касательная въ первомъ примѣрѣ будетъ $ax^2y=by^3$; и во второмъ $2x^2y=y^3$. *По* § 8 кривая не можетъ имѣть другихъ кратныхъ точекъ.

Пр. 3. $\quad ay^2-x^3\pm bx^2=o,$

начало есть двойная точка, а касательныя въ немъ

$$ay^2\pm bx^2=o.$$

Когда беремъ знакъ $+$, то начало есть сопряженная точка.

Пр. 4. $\quad (x^2-a^2)^2=ay^2(cy+3a),$

или $\quad (x-a)^2(x+a)^2=ay^2(2y+3a),$

очевидно, что здѣсь $(x-a, y)$ и $(x+a, y)$ суть двойныя точки. Чтобы найти касательныя въ первой изъ нихъ, сдѣлаемъ $x=a$, $y=o$ въ той части, которая умножаетъ $(x-a)^2y$, то найдемъ

$$4(x-a)^2=3y^2.$$

Точно также найдемъ и во второй.

Кривая имѣетъ еще третью двойную точку, которую найдемъ написавъ уравненіе въ формѣ:

$$x^2(x^2-2a^2)=a(2y-a)(y+a)^2,$$

слѣдовательно $(x, y+a)$ есть двойная точка, а касательныя въ ней будутъ

$$2x^2=3(y+a)^2.$$

Найдя эти три, по § 8 видимъ, что больше быть не можетъ.

Пр. 5. $\quad (by-cx)^2=(x-a)^3$

Точка $(by-cx, x-a)$ будетъ *носокъ* такото рода, что касательная въ немъ пересѣкаетъ кривую въ шести послѣдовательныхъ точкахъ.

Пр. 6. $\quad x^4(x+b)=a^3y^2.$

Начало есть двойная точка, касательная въ ней пересѣкаетъ кривую въ четырехъ послѣдовательныхъ точкахъ. Есть тройная точка на безконечности, въ которой линія, лежащая на безконечности касается кривой. Линія $x-b$ касается кривой въ точкѣ ея пересѣченія съ осью x, и еще въ точкѣ перегиба, лежащей на безконечности.

Пр. 7. $\quad x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}+z^{\frac{3}{2}}=o.$

Сбросивъ радикалы получимъ

$$(x^2+y^2+z^2)^3=27.\,x^2y^2z^2.$$

Въ этой формѣ очевидно существованіе шести носковъ, ибо каждая изъ точекъ, въ которыхъ x пересѣкаетъ y^2+z^2 есть, двойная, онѣ имѣютъ одну только касательную x. Точно также и для

$$(y, x^2+z^2) \text{ и } (z, x^3+y^2).$$

Кривая имѣетъ еще другія двойныя точки, именно $(x\pm y, x\pm z)$.

Это можно показать, полагая $y\mp x=u$, $z\mp x=v$, а слѣдовательно

$$y=u\pm x, \quad z=v\pm x,$$

подставляя эти величины въ уравненіе, оно приметъ форму:

$$u^2\phi+uv\psi+v^2\pi=o.$$

Касательныя въ двойной точкѣ даются уравненіями

$$u^2\pm uv+v^2=o,$$

слѣдовательно двойныя точки суть сопряженныя.

Полюсы и Поляры.

§ 20. Мы видѣли, что прямая проведенная чрезъ начало пересѣчетъ кривую въ n точкахъ $R_1, R_2, \ldots R_n$. Если теперь на каждой изъ такихъ прямыхъ возмемъ такую точку R чтобы

$$\frac{n}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{R_n},$$

то геометрическое мѣсто точки R будетъ прямая.

Легко видѣть, что уравненіе опредѣляющее $\frac{1}{OR_1}, \frac{1}{OR_2}, \frac{1}{OR_3}, \ldots$ будетъ

$$A\frac{1}{\varrho^n} + (B \operatorname{Cos} Q + C \operatorname{Sin} Q)\frac{1}{\varrho^{n-1}} +$$

$$(D \operatorname{Cos} Q + E \operatorname{Cos} Q \operatorname{Sin} Q + F \operatorname{Sin} Q)\frac{1}{\varrho^{n-2}} + \ldots = o,$$

слѣдовательно $\frac{n}{OR} = -\frac{B \operatorname{Cos} Q + C \operatorname{Sin} Q}{A}$, или, возвращаясь къ координатамъ x, y, будетъ

$$Bx + Cy + nA = o.$$

Эта линія называется *поляръ—прямою начала*, которое въ этомъ случаѣ называется *полюсомъ* по аналогіи съ поляръ-прямою въ коническихъ сѣченіяхъ (*)

§ 21. Мы можемъ составить уравненія *поляръ-кривыхъ* высшихъ порядковъ. Такъ можно составить уравненіе:

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right) = o,$$

которое очевидно будетъ:

$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\frac{1}{\varrho^2} - (n-1)\frac{1}{\varrho}\,\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \Sigma\left(\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right) = o,$$

оно выражаетъ такое коническое сѣченіе, котораго средне-гармоническое разстояніе отъ начала равно средне-гармоническому растоянію начала отъ данной кривой. И что обратное произведеній разстояній коническаго сѣченія отъ начала, равно среднему произведеній попарно обратныхъ разстояній начала отъ этой кривой. Это коническое сѣченіе называется *поляръ-коническимъ сѣченіемъ.* (**) Его уравненіе найдется, замѣщая

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}\right),\ \Sigma\left(\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right)$$

величинами изъ уравненія кривой, а именно:

$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\frac{1}{\varrho^2} + (n-2)\frac{B \operatorname{Cos} Q + C \operatorname{Sin} Q}{A}\frac{1}{\varrho} +$$

$$+\frac{D \operatorname{Cos}^2 Q + E \operatorname{Sin} Q \operatorname{Cos} Q + F \operatorname{Sin}^2 Q}{A} = o,$$

которое, перейдя къ координатамъ x, y, можно написать въ формѣ

$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}u_0 + (n-1)u_1 + u_2 = o$$

(*) См. мой переводъ съ Англійскаго „*Коническія сѣченія*" Сольмана (§ 146).

(**) Обратнымъ количества a называютъ $\frac{1}{a}$

§ 22. Подобнымъ образомъ мы можемъ получить *поляръ-кривую к-го* порядка, составивъ уравненіе:

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_k}\right) = o,$$

которое очевидно можно написать въ формѣ:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots k}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^k - \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k-1}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k-1}\Sigma\frac{1}{\varrho} +$$

$$\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots k-2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k-2}\Sigma\left(\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right) + \ldots = o$$

Это есть кривая степени k, она имѣетъ слѣдующія свойства:

$$\frac{1}{n}\,\Sigma\frac{1}{OR} = \frac{1}{k}\,\Sigma\frac{1}{Or},$$

$$\frac{1.\,2}{n(n-1)}\,\Sigma\frac{1}{OR_1OR_2} = \frac{1.\,2}{k(k-1)}\,\Sigma\frac{1}{Or_1\,Or_2},$$

$$\frac{1.\quad 2.\quad 3}{n(n-1)(n-2)}\,\Sigma\frac{1}{OR_1OR_2OR_3} = \frac{1.\quad 2.\quad 3}{k(k-1)\,k-2)}\,\Sigma\frac{1}{Or_1Or_2Or_3},$$

OR означаетъ радіусъ секторъ данной кривой, а Or поляръ-кривой.

Уравненіе поляръ кривой *к-го* порядка получится, подставляя вмѣсто $\Sigma\frac{1}{\varrho}\ldots$, ихъ величины, оно будетъ:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)^k + \frac{k}{n}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k-1}\frac{(B \operatorname{Cos} Q + C \operatorname{Sin} Q)}{A} +$$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k-2}\left(\frac{D \operatorname{Cos}^2 Q + E \operatorname{Sin} Q \operatorname{Cos} Q + F \operatorname{Sin}^2 Q}{A}\right) + . = o$$

или переходя къ координатамъ x, y получимъ

$$u_0 + \frac{k}{n}u_1 + \frac{k(k-1)}{n(n-1)}u_2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}u_3 + \ldots = o$$

Изъ составленія уравненій поляръ-кривыхъ видимъ, что поляръ-прямая начала будетъ поляръ-прямою для всѣхъ поляръ кривыхъ высшихъ порядковъ, и въ самомъ дѣлѣ средне-гармоническое радіусовъ секторовъ будетъ одно и тоже для всѣхъ кривыхъ. Что поляръ-коническое сѣченіе начала будетъ также поляръ-коническимъ сѣченіемъ для всѣхъ поляръ-кривыхъ выше втораго порядка; и въ самомъ дѣлѣ, произведеніе попарно обратныхъ разстояніямъ отъ начала есть одно и тоже для всѣхъ кривыхъ. И вообще какая нибудь поляръ-кривая начала, будетъ поляръ-кривою для всѣхъ поляръ-кривыхъ высшихъ порядковъ.

§ 23. Разсмотримъ теперь тотъ случай, въ которомъ точка O будетъ находиться на безконечномъ разстояніи. Уравненіе опредѣляющее поляръ-прямую есть

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = o, \text{ или } \Sigma\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1}\right) = o,$$

гдѣ R есть точка находящаяся на полярѣ, а R_1 одна изъ точекъ прямой; предъидущее уравненіе будетъ

$$\Sigma\frac{RR_1}{(OR.OR_1)} = o,$$

но если O находится на безконечности, то

$$OR = OR_1 = OR_2 = \ldots\ldots$$

Слѣдовательно предъидущую сумму можно разсматривать какъ имѣющую одного знаменателя, а по этому она сдѣлается,

$$\Sigma\,(RR_1) = o\,,$$

т. е, сумма отрѣзковъ между поляръ прямою и кривою на параллельныхъ хордахъ, пересѣкающихся въ точкѣ O, равна нулю. Откуда видимъ, *что поляръ-прямая точки находящейся на безконечности есть діаметръ системы параллельныхъ хордъ направленныхъ въ точку лежащую на безконечности.* (*)

Уравненіе опредѣляющее поляръ-коническое сѣченіе есть:

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_2}\right)=o,$$

или $$\Sigma\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_2}\right)=o\,,$$

или $$\Sigma\left(\frac{RR_1}{OR\ OR_1}\cdot\frac{RR_2}{OR.OR_2}\right)=o.$$

Когда точка O будетъ на безконечности, то оно сдѣлается

$$\Sigma\,(RR_1\,.\,RR_2)=o,$$

уравненіе опредѣляющее діаметральное коническое сѣченіе. И вообще можно сказать, что діаметральная кривая какого нибудь порядка, тождественна съ поляръ-кривою тогоже порядка, коей полюсъ находится на безконечномъ разстояніи.

(*) О діаметрахъ смотри Аналитическую Геометрію *Сомова* § 33.

§ 24. Дадимъ еще очень замѣчательную теорему *Маклорена* (*Mac Laurin*)—именно: *Если черезъ какую нибудь точку O проведемъ прямую, пересѣкающую кривую въ n точкахъ и въ этихъ точкахъ проведемъ касательныя къ кривой, то другая прямая, проведенная черезъ туже точку O и пересѣкающая кривую въ точкахъ R_1, R_2, . . R_n, а касательныя въ точкахъ r_1, r_2 . . . r_n, даетъ слѣдующее уравненіе*

$$\Sigma\,\frac{1}{OR}=\Sigma\,\frac{1}{Or}\,.$$

Очевидно, что двѣ точки опредѣляютъ поляръ-прямую, слѣдовательно, если двѣ прямыя, проведенныя чрезъ точку O пересѣкаютъ двѣ кривыя въ тѣхъ же точкахъ $OR_1\ OR_2$ . . ; $OS_1\ OS_2$ . . . . ; то поляръ-прямая точки O. относительно обѣихъ кривыхъ будетъ одна и таже прямая, ибо точки R и S будутъ однѣ для обѣихъ кривыхъ. Тоже будетъ справедливо, если двѣ линіи OR и OS совпадутъ, или что тоже: *Если двѣ кривыя n-ой степени касаются въ n точкахъ, лежащихъ на одной прямой; то поляръ-прямая какой нибудь точки на этой прямой будетъ одна и таже прямая для обѣихъ кривыхъ; и слѣдовательно, если радіусъ векторъ, проведенный черезъ такую точку, пересѣкаетъ обѣ кривыя, то мы будемъ имѣть*

$$\Sigma\,\frac{1}{OR}=\Sigma\,\frac{1}{Or}\,.$$

Сказавъ о поляръ-кривыхъ точки (полюса), лежащей въ началѣ координатъ, мы въ слѣдующей статьѣ скажемъ о поляръ-кривыхъ точки, лежащей гдѣ нибудь на координатной плоскости; а потомъ съ помощью этихъ данныхъ приступимъ къ общей теоріи кратныхъ точекъ и кратныхъ касательныхъ.

Кіевъ. 15 Октября 1860 г.

М. Ващенко-Захарченко.

Рѣшеніе одной задачи, содержащейся въ I-мъ томѣ Теорической Механики

Проф. Н. Брашмана.

»Найти уравненіе кривой, описанной матеріальною точкою, подверженною одной силѣ тяжести, въ горизонтальной плоскости, вращающейся съ постоянною угловою скоростью около вертикальной оси.»

По стран. 284-ой I-го тома «Механики» уравненія движенія суть:

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ o=\frac{d^2x}{dt^2}-2\,\omega\,\frac{dy}{dt}=\omega^2x$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ o=\frac{d^2y}{dt^2}+2\,\omega\,\frac{dx}{dt}-\omega^2y$$

$$(3)\ \ldots\ldots\ldots\ \lambda+g=o.$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій опредѣляетъ величину сопротивленія. Сумма двухъ первыхъ уравненій, соотвѣтственно помноженныхъ на dx, dy, даетъ $d\ (v^2)=\omega^2 d\,(r^2)$, гдѣ r означаетъ разстояніе матер. точки отъ начала координатъ. Отсюда $v^2=\omega^2r^2+C$, или въ полярныхъ координатахъ

$$(4)\ \ldots\ r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\omega^2r^2+C.$$ Разность произведеній уравн. (2) на x безъ ур. (1) на y даетъ

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)+\omega\,\frac{d\,(r^2)}{dt}=o\ ,\ \text{или}$$

$$(5)\ \ldots\ r^2\frac{d\varphi}{dt}+\omega\,r^2=C_1\,.$$ Исключивъ помощію этого уравненія изъ ур. (4) $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$, получимъ

$$r^2\left(\frac{C_1}{r^2}-\omega\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=C+\omega^2r^2,\ \text{или}$$

$$dt=\frac{rdr}{\sqrt{(C+2\ C_1\,\omega)\,r^2-C_1^{\,2}}}\,.$$

Вставивъ это выраженіе въ ур. (5) находимъ

$$d\varphi = \frac{C_1\,dr}{r^2\sqrt{C + 2\,C_1\omega - \frac{C_1^2}{r^2}}} - \frac{\omega\,r dr}{\sqrt{(C+2\,C_1\,\omega)\,r^2 - C_1^2}},\ \text{или}$$

$$d\varphi = -\frac{C_1 d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{C+2\,C_1\,\omega - \frac{C_1^2}{r^2}}} - \frac{\omega\,r dr}{\sqrt{(C + 2\,C_1\,\omega)\,r^2 - C_1^2}},$$

отсюда

$$\varphi + C_2 = arc\left[\text{Cos} = \frac{C_1}{r\sqrt{C+2C_1\omega}}\right] - \frac{\omega\sqrt{(C+2\,C_1\omega)r^2 - C_1^2}}{C+2\,C_1\omega}$$

Эта задача рѣшена на стран. 284 въ неточномъ предположеніи что $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, что очевидно несправедливо, потому что матеріальная точка не принуждена оставаться на оси x, какъ это бываетъ, когда точка двигается въ горизонтальной трубкѣ, вращающейся около вертикальной оси.

Я еще долженъ обратить вниманіе на одну погрѣшность, которую можетъ быть нѣкоторые читатели уже исправили. На стран. 232 въ задачѣ 15 напечатано: найти видъ *вертикальной кривой*, вмѣсто горизонтальной кривой, т. е. кривой, описанной въ горизонтальной плоскости. Всякій понимаетъ, что матер. точка, подверженная дѣйствію тяжести въ вертикальной плоскости, не можетъ имѣть постоянную скорость.

20-го Декабря 1860 г.

Николай Брашманъ.

Москва.

III.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. *О законахъ распространенія электричества въ полу-проводникахъ. Статья Гогена.*

(Annales de Chimie et de Physique. T. LIX).

Относительно электрической проводимости тѣла подраздѣляются на хорошіе проводники, непроводники и полупроводники. Законъ распространенія электричества въ хорошихъ проводникахъ уже давно извѣстенъ; поэтому Гогенъ подвергъ изслѣдованію распространеніе электричества и въ полупроводникахъ съ цѣлію открыть и для нихъ законы.

Опыты были производимы помощію Электроскопа съ двумя золотыми листочками, отклоненіе которыхъ наблюдалось издали, а уголъ отклоненія измѣрялся помощію дуги, начерченной на боковой грани стекляннаго ящика, вмѣщающаго въ себѣ Электроскопъ. Электроскопъ былъ заряжаемъ опредѣленнымъ количествомъ электричества; а потомъ къ нему прикасался одинъ конецъ испытуемаго полупроводника (преимущественно бумажной нити), котораго другой конецъ былъ сообщенъ съ землею: полупроводникъ отводилъ электричество въ землю и отклоненіе листочковъ Электроскопа уменьшалось. Время употребленное для совершеннаго уничтоженія отклоненія, или покрайней мѣрѣ до опредѣленной величины, замѣчалось и служило мѣрою проводимости испытуемаго вещества.— Гогенъ называетъ этотъ методъ —,,истеченія'' (d'écoulement). Другой методъ состоялъ въ томъ, что Электроскопъ, вышеупомянутый, соединялся полупроводникомъ съ другимъ Электроскопомъ съ золотыми листочками, въ которомъ на небольшомъ разстояніи отъ золотыхъ листочковъ, находился металлическій стержень съ шарикомъ, и конецъ этого стержня выходилъ сквозь крышку Электроскопа наружу. Этотъ конецъ стержня соединялся помощію полупроводника съ землею. Такимъ образомъ электричество, выходя изъ перваго Электроскопа, отклоняетъ листочки другаго Электроскопа, которые приходятъ тогда въ соприкосновеніе съ металлическимъ стержнемъ, находящимся тоже въ сообщеніи съ землею посредствомъ полупроводника. Этотъ методъ названъ методомъ ,,разряженія'' (décharge).

Изъ опытовъ оказалось:

I) *a*. Количество электричества, проходящаго по проводнику однородному и цилиндрическаго вида, соединенному однимъ концемъ съ Электроскопомъ, а другимъ съ землею, находится въ обратномъ отношеніи съ длиною проводника.

b. Напряженіе электричества измѣняется отъ одной точки къ другой по закону *Ома*.—равномѣрно уменьшаясь.

II) Если электричество распространяется по нѣсколькимъ отдѣльнымъ проводникамъ вдругъ, которыхъ сопротивленіе, каждаго отдѣльно λ, λ', λ'' . . . ; то сопротивленіе цѣлой системы $\varDelta$ можетъ быть выражено:

$$\frac{1}{\varDelta} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} \ \ldots,$$

При этомъ Гогенъ нашелъ, что проводникъ, развѣтвленный на подобіе Y, подлежитъ тому же самому закону.

III) Количество электричества, проходящаго по проводнику, соединенному однимъ концемъ съ землею а другимъ съ постояннымъ источникомъ электричества, пропорціонально электрическому напряженію этого источника,—согласно съ закономъ *Ома*.

IV) Количество электричества, проходящаго по проводнику прямо пропорціонально поперечному разрѣзу. При этомъ Гогенъ нашелъ, что полный зарядъ проводника (charge totale) зависитъ исключительно отъ его наружней поверхности.

Гогенъ нашелъ также, что всѣ испытанные имъ полупроводники слѣдуютъ, относительно электропроводимости, вышеприведеннымъ законамъ; только одинъ родъ стекла, изъ котораго приготовляются газоотводныя трубки, составляетъ исключеніе. Если взять рукою за одинъ конецъ трубки прикоснутся къ заряженному Электроскопу, то послѣдній разряжается почти мгновенно; напротивъ, когда нѣсколько короткихъ трубокъ соединены между собою металлическими проволоками, которыхъ концы въ видѣ колецъ надѣты на

трубки на нѣкоторомъ разстояніи отъ концевъ; то разряженіе Электроскопа посредствомъ такой системы идетъ чрезвычайно медленно. Изъ многихъ разнообразныхъ опытовъ Гогенъ пришелъ къ заключенію, что въ стеклянныхъ трубкахъ находится два рода проводимости: одна *внутренняя*, состоящая въ болѣе или менѣе легкомъ переходѣ электричества отъ одной точки тѣла къ другой; другая *внѣшняя*, которая состоитъ въ большей или меньшей легкости, съ которою переходитъ электричество поверхность раздѣла двухъ тѣлъ. Сопротивленіе внѣшнее, въ сравненіи съ внутреннимъ, очень велико.

Наконецъ изъ всѣхъ испытанныхъ тѣлъ оказалось, что только гуммилакъ есть истинный непроводникъ, если онъ сохранялся въ сухой средѣ; напротивъ, если во влажной то, становится полупроводникомъ: но онъ пріобрѣтаетъ прежнее свойство непроводимости, если его крѣпко нагрѣть и затѣмъ держать въ сухой средѣ.

Всѣ изложенные законы принадлежатъ тому случаю, когда напряженіе электричества постоянно. Что касается законовъ распространенія электричества въ полупроводникахъ, когда напряженіе перемѣнно, то объ нихъ Гогенъ представилъ записку Парижской Академіи Наукъ и мы находимъ въ „Comptes rendus" 1860 г. 20 Февраля, общую формулу

$$T = \frac{Cl^2}{kw},$$

гдѣ T означаетъ время распространенія, k проводимость, l длину цилиндрическаго, проводника w площадь сѣченія, C такъ называемый *коефиціентъ заряда*. C есть количество электричества, составляющее зарядъ проводника имѣющаго длину=единицѣ, изолированнаго и соединеннаго однимъ концемъ съ источникомъ электричества, котораго напряженіе равно единицѣ. Этотъ коефиціентъ долженъ быть опредѣленъ изъ опытовъ для всякого случая. *Время распространенія* есть тотъ промежутокъ времени, который проходитъ отъ момента сообщенія проводника съ источникомъ электричества до того момента, когда напряженіе электричества въ проводникѣ сдѣлается постояннымъ.

Вышеприведенная формула обнимаетъ всѣ законы, найденные Гогеномъ, а именно:

1) *Время распространенія* электричества не зависитъ отъ напряженія эл. источника.
2) *Время распространенія* эл. измѣняется въ обратномъ отношеніи съ проводимостію,— при однихъ и тѣхъ же размѣрахъ проводника.
3) Если проводимость и поперечный разрѣзъ не измѣняются, то *время распространенія* эл. пропорціонально квадрату длины проводника.
4) *Время распространенія* эл. обратно пропорціонально площади поперечнаго разрѣза проводника.
5) Наконецъ, если проводимость, длина и площадь поперечнаго разрѣза неизмѣнны, но видъ послѣдняго измѣняется такимъ образомъ, что съ нимъ вмѣстѣ измѣняется и *зарядъ динамическій* (charge dynamique); то время распространенія пропорціонально этому заряду.

Замѣтимъ, что Гогенъ называетъ *динамическимъ зарядомъ* число разряженій, произведенныхъ заряженнымъ проводникомъ во второмъ изъ описанныхъ выше Электроскоповъ. Для опредѣленія динамическаго заряда въ данномъ проводникѣ, Гогенъ поступаетъ такъ: проводникъ, напримѣръ бумажную нить, кладетъ на изолированныя подставки и соединяетъ однимъ концемъ A съ первымъ Электроскопомъ, какъ источникомъ электричества, а другимъ концемъ B со вторымъ Электроскопомъ; когда замѣтитъ первый разрядъ на второмъ Электроскопѣ, тогда отнимаетъ конецъ A отъ перваго и считаетъ число разряженій на второмъ Электроскопѣ. Это число онъ называетъ *динамическимъ зарядомъ* проводника.

Вышеупомянутые законы относятся къ тому случаю, когда окружающій воздухъ не причиняетъ значительной потери электричества.

Въ „Comtes rendus" 1860, 22 Октября, находится опредѣленіе коефиціента заряда C въ телеграфическихъ проволокахъ; причемъ получены слѣдующіе результаты:

діаметръ проволоки.	*коеффиціентъ заряда.*
$1^{mm.}$	100
2	113
3	125
4	133
5	141.

Одкуда видно, что коефиціентъ заряда ростетъ медленнѣе нежели діаметръ. Гогенъ объясняетъ это явленіе такимъ образомъ, что поверхность электрическаго слоя ростетъ вмѣстѣ съ діаметромъ проволоки, но его плотность уменшается съ увеличеніемъ діаметра. Вычисленныя *времена распространенія* элек. пропорціональны слѣдующимъ числамъ:

діаметръ проволоки	1,	2,	3,	4,	5,
время распространенія	100,	28,2	13,9	8,3	5,6

Отсюда видно, что, увеличивая діаметръ проводника значительно увеличивается скорость передачи Электричества. Наконецъ при этихъ опытахъ Гогенъ нашелъ, что гуттаперча, хотя лучшій изоляторъ противъ каучука, но все таки не есть совершенный изоляторъ.

2. *О гальванической поляризаціи металлическихъ плитъ, зарытыхъ въ землю.*

Если зарыть въ землю двѣ цинковыя плиты на нѣкоторомъ одна отъ другой разстояніи, и соединить ихъ надъ землею металлической проволокой; то въ послѣдней оказывается токъ, который даетъ на Гальванометрѣ опредѣленное отклоненіе и который существуетъ очень долго. Др. Карль (Pogg. Ann. Bd. CXI, S. 346) показалъ, что этотъ токъ происходитъ отъ поляризаціи цинковыхъ плитъ; для сего онъ вставилъ въ *цѣпь* одинъ элементъ Даніеля и оставилъ его дѣйствующимъ въ продолженіе 5 минутъ. Еслибы первоначальный токъ происходилъ не отъ поляризаціи цинковыхъ плитъ, то, послѣ исключенія элемента изъ цѣпи, стрѣлка Гальванометра должна бы всякій разъ возвращаться въ первоначальное положеніе; напротивъ, если есть поляризація, то отклоненіе стрѣлки Гальванометра, послѣ исключенія элемента, должно быть больше въ томъ случаѣ, когда первоначальный токъ съ токомъ элемента имѣютъ противоположное направленіе, и на оборотъ. Опыты вполнѣ подтвердили первое предположеніе,—

что доказываетъ существованіе поляризаціи цинковыхъ плитъ.

По этому гальваническая поляризація металлическихъ плитъ, зарытыхъ въ землю на телеграфическихъ станціяхъ, имѣетъ значительное вліяніе на ослабленіе *дѣйствующаго тока*, въ особенности при сильныхъ источникахъ тока.

3. *Poggendorf's* Annalen d. Physik und Chemie, B. CXI, s. 180.—Кёльнскій механикъ Фессель, при сравненіи двухъ одинакихъ камертоновъ, нашелъ разницу между высотами ихъ тоновъ; но послѣ внимательнаго разсмотрѣнія явленія оказалось, что эта разница зависитъ отъ неодинаковаго впечатлѣнія въ обѣихъ ушахъ: правое ухо г. Фесселя слышитъ тонъ высшій, нежели лѣвое. По этому поводу Фессель сдѣлалъ много опытовъ и нашелъ, что между его знакомыми, въ числѣ которыхъ были и музыкальные артисты, не нашлось ни одного, который бы обѣими ушами слышалъ одинъ и тотъ же тонъ камертона, и что у всѣхъ правое ухо слышитъ тонъ высшій, нежели лѣвое.

Изъ произведенныхъ мною подобнаго рода опытовъ оказалось, что въ числѣ 92 испытанныхъ особъ у 26 правое ухо давало впечатлѣніе высшаго тона, 20 слышали одинакіе тоны, а осталные 46 ощущали высшій тонъ въ лѣвомъ ухѣ. Касательно тѣхъ, которые ощущали одинакій тонъ, можно сдѣлать замѣчаніе, что вѣроятно и они принадлежатъ къ первому или послѣднему разряду, но что только они не были въ состояніи отличить очень малую разницу въ высотѣ тона. Какъ-бы то ни-было, однакожъ въ моемъ опытѣ оказалось, что большинсто ощущаетъ высшій тонъ въ лѣвомъ ухѣ; къ этому отдѣлу принадлежу и я: неужели есть какая либо существенная разница между органами слуха Кёльнскихъ жителей и нашими?

Во всякомъ случаѣ наблюденія показываютъ, что сравненіе камертоновъ не должно быть основано на оцѣнкѣ уха, какъ это по большей части и дѣлаютъ механики, доставляющіе камертоны фортепьяннымъ мастерамъ; въ этомъ случаѣ глазъ гораздо лучше можетъ оцѣнить одинаковость звука, если производить сравненіе камертоновъ по методу, употребленному Лиссажу для нагляднаго показанія отношенія двухъ звуковъ.

4. Julius Thomsen (Pogg. Ann. B. CXI p. 192) предлагаетъ комбинацію двухъ веществъ, дающую очень постоянный гальваническій элементъ. Онъ состоитъ изъ *мѣди и угля;* мѣдь постовляется въ слабо разведенную сѣрную кислоту (въ пропорціи 1 ч. кис. на 4 ч. воды), а уголь въ растворъ хромовокислаго кали. Электровозбудительная сила такого элемента, по опредѣленію Thomsen'а, равна $^9/_{10}$ элем. Даніеля; но постоянство его значительно и нѣтъ отдѣленія Газовъ, которое неизбѣжно въ элементахъ Даніеля, даже при хорошо наамальгамированныхъ цинкахъ, если только элементъ долго дѣйствуетъ.

Я устроилъ элементъ, по методу Thomsen'а—и онъ оказался вполнѣ удовлетворяющимъ цѣли. Въ устроенномъ мною элементѣ мѣдь находилась въ разведенной сѣрной кислотѣ (1 ч. к. на 4 воды), а уголь, подобный тому, какой употребляется въ элементахъ Бунзена, въ растворѣ состоящемъ изъ 3 ч. хромовокислаго кали, 4 ч. сѣрной кислоты и 18 ч. воды. Электровозбудительная сила, устроеннаго элемента была почти такая же, какая найдена Thomsen'омъ. Главное однакожъ достоинство элемента Thomsen'а состоитъ въ значительномъ постоянствѣ и въ отсутствіи отдѣленія газовъ: элементъ дѣйствовалъ у меня въ продолженіе 8 сутокъ, безъ значительнаго ослабленія и безъ малѣйшаго отдѣленія газовъ.

К. Ч.

IV.

Привиллегированные часы Бюрка для сторожей и надзирателей на фабрикахъ и заводахъ

(съ чертежами).

На многихъ фабрикахъ и заводахъ учрежденъ порядокъ, чтобы извѣстныя лица въ срочное время находились въ указанныхъ мѣстахъ для извѣстной цѣли. Напр. сторожъ долженъ обойти внутри строеніе, остановиться на нѣсколько минутъ въ томъ, или другомъ отдѣленіи, осмотрѣть и дать отчетъ въ исполненіи. Надзиратель долженъ посѣтить рабочихъ непремѣнно въ извѣстный часъ и во столько-то минутъ. Неисправность, или пропускъ срочнаго исполненія могутъ быть причиною безпорядковъ, нетерпимыхъ при хорошемъ устройствѣ заведенія.

Есть-ли какая возможность повѣрять исполнительность назначенныхъ для того лицъ? Сторожъ говоритъ, что былъ на мѣстѣ, а по послѣдствіямъ оказывается, что не былъ. Увертливыя оправданія съ одной стороны, и убѣжденія въ противномъ съ другой ставятъ въ непріятное положеніе людей, наблюдающихъ за порядкомъ и правильнымъ ходомъ дѣла. Нѣкто *Бюркъ* изъ Швеннингена въ Виртембергскомъ королевствѣ придумалъ часовой приборъ, помощію котораго можно повѣрять дѣйствія лицъ, коимъ поручается срочное посѣщеніе и осмотръ указанныхъ имъ мѣстъ. Г. Бюрку выдана привиллегія на приборъ, который онъ назвалъ *сторожевыми часами*.

Получивъ недавно экземпляръ такихъ часовъ чрезъ посредство Доктора *Гамма*, извѣстнаго фабриканта сельско-хозяйственныхъ орудій въ Лейпцигѣ, считаю небезполезнымъ сообщить описаніе этого любопытнаго прибора. *Черт. 1.* представляетъ металлическую коробку внутри которой заключается часовой механизмъ. Въ отверстіе, видное съ боку, вставляется ключъ (*a*), которымъ и открывается крышка. Ключь этотъ находится у главнаго контролера заведенія. Утромъ онъ отпираетъ имъ крышку, чтобы завести часы, а вечеромъ, чтобы повѣрить исправность сторожа, или другаго лица. Боковою задвижкою (*d*) отверстіе для ключа постоянно, въ теченіе дня, закрыто. Для сторожа оно ненужно.

Въ отверст е сверху крышки вставляется другой ключъ (*b*), постоянно находящійся при часахъ. Сторожъ,

или надзиратель, на которомъ лежитъ обязанность быть въ срочное время на указанномъ мѣстѣ, подходитъ къ часамъ, висящимъ тамъ въ особомъ деревянномъ футлярѣ, беретъ такой ключь, поворачиваетъ его въ отверстіи, вынимаетъ, и, положивъ на мѣсто, уходитъ, или дожидается столько времени, сколько предписано, и опять производитъ подобную же операцію.

Такимъ образомъ обязанность исполнена, а дѣйствительно ли въ назначенное время, приборъ самъ покажетъ.

При уходѣ сторожъ закрываетъ отверстіе для ключа, поворачивая мѣдный кружокъ, означенный буквою (*c*).

Черт. 2 представляетъ открытые часы.

a . . a часовой циферблятъ

b . . b металлическое кольцо, почти въ палецъ вышиною, окружаетъ циферблятъ. Это кольцо сидитъ на оси въ центрѣ циферблята. Когда часы заведены, то кольцо имѣетъ съ ними равномѣрный ходъ. Часы заводятся обыкновеннымъ образомъ. Ключь вставляется въ отверстіе (*e*).

d . . d поперечная мѣдная пластинка, съ именемъ изобрѣтателя, служитъ для того, чтобы кольцо не соскочило съ своего мѣста. Острее по серединѣ пластинки входитъ въ шляпку кольца, которое и движется свободно, какъ бы на оси.

Мѣдная пластинка держится однимъ концомъ на шарнерѣ (*g*), другой же свободный упирается въ пружину (*h*), и легко подымается. А подымается она въ то время, когда надобно снять кольцо, наложить на его окружность полоску бумаги, и опять поставить кольцо на мѣсто.

f . . f стальная пружина между кольцомъ и внутреннею стѣнкою коробки. При концѣ ея, выдающійся штифтикъ (*i*) входитъ въ отверстіе, означенное на откинутой крышкѣ подъ буквою (*b'*) и соотвѣтствующее отверстію (*b*), когда часы закрыты (Черт. 1). Стальная пружина разрѣзана вдоль на 6 тонкихъ полосокъ. Каждая изъ нихъ имѣетъ на концѣ острее, обращенное къ окружности кольца. Ключъ, которымъ долженъ дѣйствовать сторожъ, или надзиратель, прижимаетъ, смотря по устройству бородки, одну, двѣ, три, или всѣ вмѣстѣ полоски пружины къ кольцу, а острея ихъ оставляютъ на бумагѣ столько проколотыхъ точекъ, сколько задѣто полосокъ пружины.

На каждомъ ключѣ есть номеръ той станціи, или той комнаты, гдѣ висятъ часы. Ключи по произволу можно мѣнять каждый день, что и дѣлается главнымъ надзирателемъ, если онъ находитъ это нужнымъ.

Черт 4. Представляетъ для образца нѣсколько ключей:
ключъ N. 1, придавливаетъ одну верхнюю пружину,
ключъ N. 6, придавливаетъ всѣ шесть пружинъ,
ключъ N. 7, придавливаетъ верхнюю и нижнюю пружины.

Положимъ, что сторожу надобно быть въ указанномъ мѣстѣ въ 2 ч. 10 минутъ. Онъ аккуратно въ это время уже тамъ, вставляетъ ключъ, поворачиваетъ разъ, потомъ вынимаетъ, и дѣло его сдѣлано: на окружной бумажкѣ кольца есть уже необходимая для контролера замѣтка. Если сторожъ опоздалъ; то замѣтка укажетъ сколькими минутами онъ явился позже назначеннаго ему времени быть въ данномъ мѣстѣ. Если онъ вовсе пропустилъ срочное время, то не будетъ никакого знака.

Черт. 3. Если снять подвижное кольцо, поднявъ предварительно поперечную пластинку кверху; то въ этомъ положеніи виднѣе пружина, играющая одну изъ главныхъ ролей въ механической повѣркѣ аккуратной, или неаккуратной исполнительности.

Черт. 5. Контрольная бумажка. Она накладывается на окружность кольца, прокалывается небольшимъ острeемъ и такимъ образомъ держится на окружности. Бумажка раздѣлена поперегъ на 12 частей, или часовъ, съ подраздѣленіемъ каждой на 6 частей по 10 минутъ. Видимыя цифры означаютъ часы. Кромѣ того бумажка раздѣлена въ длину 6-ю параллельными линіями. Такимъ образомъ промежутокъ для каждаго часа представляетъ 36 клѣтокъ.

Замѣтки отъ пружинъ обозначаются точками, или на линіяхъ пересѣченія, или въ клѣткахъ. Напр. ежели условленное время 12 ч. 20 м.; тогда замѣтка на второй поперечной чертѣ послѣ цифры 12. Ежели нужно быть на мѣстѣ въ 10 ч. 15 м.; то замѣтка приходится по серединѣ втораго поперечнаго ряда клѣтокъ.

Въ Конторѣ главнаго надзирателя завода имѣется книга для записыванія исправности или неисправности срочныхъ порученій. Порядокъ ведется слѣдующій.

Главный надзиратель заводитъ всѣ часы сторожевые въ одно время, запираетъ ихъ и приказываетъ повѣсить въ извѣстныхъ мѣстахъ. При часахъ виситъ ключъ для сторожа. Сколько мѣстъ для обхода, или надзора, столько и часовъ.

Когда кончаются занятія, часы приносятся въ контору. Главный Контролеръ отпираетъ ихъ, снимаетъ контрольную бумажку и повѣряетъ по росписанію, у него хранящемуся, исправность служителя. Оказавшаяся неисправность вносится въ особую книгу и записывается положенный штрафъ. Для большаго порядка ежедневныя контрольныя бумажки, вынутыя изъ часовъ, вклеиваются въ книгу, гдѣ обозначается имя сторожа, или надзирателя за работами. Вотъ образецъ такой записки и внесенія контрольныхъ бумажекъ.

Мѣс.	Число.	*Сторожевой контроль.*	Примѣч.	Штрафъ
	1	мѣсто, гдѣ наклеивается контрольная бумажка.	опоздалъ столькими-то минутами	
		имя сторожа, или надзирателя.		
	2	контрольная бумажка.	вовсе не былъ въ такое то время.	
		имя сторожа, или надзирателя.		

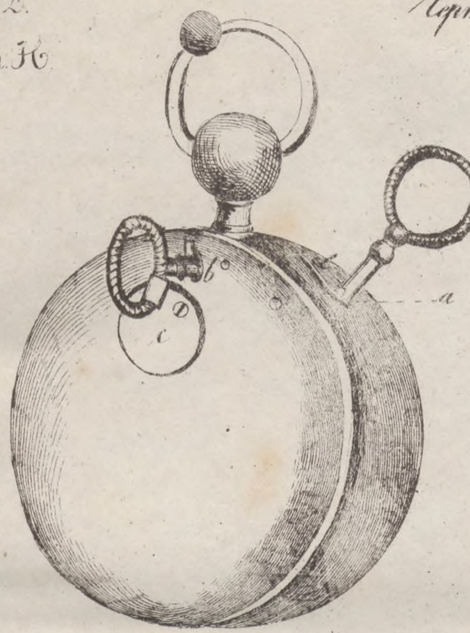
и т. д.

В. Лапшинъ.

Печатать позволяется Вильно 12 Января 1861 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*
ВИЛЬНО Типографія А. Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*

Къ № 2.
Вѣст. Мат. Н.

Черт. 1



Черт 1 представляетъ наружный видъ часовъ запертыхъ.
a..мѣсто для ключа которымъ открываются часы
b..отверстіе, въ которое сторожъ вставляетъ ключъ постоянно при часахъ находящійся.

Черт: 2

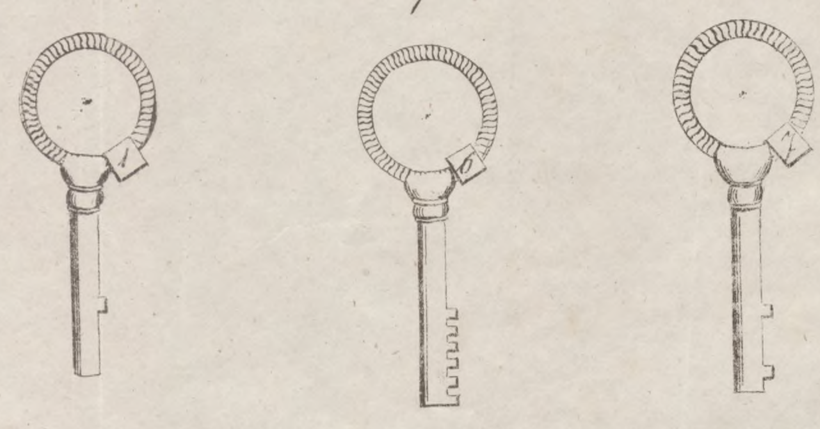


Черт 2 представляетъ открытые часы
a..a циферблятъ
b..b Кольцо вокругъ циферблята
d..d поперечная пластинка
e отверстіе для заводи часовъ
f..f пружина
i штифтикъ съ ключемъ на немъ.

Черт. 3

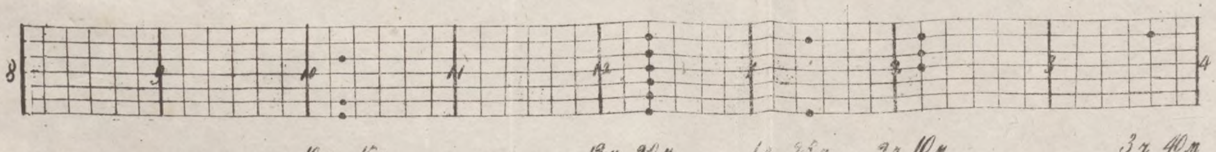


Черт: 4



Черт: 5

Контрольная бумажка



съ фотографіи въ Лито Изжелевыхъ